

六面体有限覆盖的三维数值流形方法的非线性分析

周小义¹, 邓安福²

(1.四川省地质工程勘察院, 成都 610072; 2.重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘 要: 对三维问题的分析是数值流形方法发展的必然, 在数值流形方法覆盖位移函数的基础上构造了一种六面体有限覆盖的三维流形单元, 推导了相应的应变矩阵、刚度矩阵及平衡方程等表达式。同时, 由于目前数值流形方法的模拟分析主要是采用线弹性模型, 而对于非线性模型分析研究很少; 根据数值流形方法的特点和岩土体的本构模型, 给出了适用于数值流形方法进行非线性分析的算法。该方法利用中点增量法进行求解, 以改变 $E-\mu$ 模型和 $K-G$ 模型中弹性模量的方式来反映非线性, 其实质是用分段线性来取代非线性。通过地基沉降计算算例表明, 数值流形方法在三维岩土体中进行非线性分析中是有效的。

关 键 词: 数值流形方法; 三维问题; 六面体; 非线性分析

中图分类号: O 241.7

文献标识码: A

Nonlinear analysis of three-dimensional numerical manifold method with hexahedron finite covers

ZHOU Xiao-yi¹, DENG An-fu²

(1. Sichuan Institute of Geological Engineering Investigation, Chengdu 610072, China;

2. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: Analyzing three dimension is the developmental trend of numerical manifold method. Three-dimensional manifold element with hexahedral finite element covers is constructed by cover displacement function of numerical manifold method, strain matrix, stiffness matrix and equilibrium equations are derived. Simultaneity, linear elastic model is mostly adopted on numerical manifold method for problem analysing persently, but nonlinear model is researched very little, calculating formulations of numerical manifold method for nonlinear analysis based on the characters of numerical manifold method and constitutive models of rock and soil mass is presented. The elastic modulus of $E-\mu$ model and $K-G$ model is altered to describe the nonlinear relationship by midpoint incremental method; in fact subsection linear relationship is substituted for nonlinear relationship. Finally, an example of foundation settlement calculation is given; the calculation result shows the validity of nonlinear analysis of three-dimensional numerical manifold method for rock and soil mass.

Key words: numerical manifold method; three dimension; hexahedron; nonlinear analysis

1 引 言

数值流形方法用于计算结构或材料的位移和变形, 能对连续变形与非连续变形问题进行统一求解, 对问题具有较高的求解精度, 是目前岩土工程数值分析方法中很有发展潜力的数值方法之一。

自上世纪 90 年代石根华率先提出和应用后^[1], 经过十多年的发展, 其二维理论已经趋于完善^[2-7], 且在工程应用方面也逐渐增多^[8-13]。而在实际的岩

土工程中, 大多为三维问题, 因此, 对数值流形方法的三维理论研究是必需的。在三维问题分析中最常见的是四面体单元^[14]、六面体单元^[15-16]和五面体单元(三角形棱柱单元)等。在已有研究的基础上, 文中探讨了六面体有限覆盖的三维数值流形方法, 基于数值流形方法的基本理论, 推导了覆盖位移函数、应变矩阵、刚度矩阵及平衡方程等表达式。

目前数值流形方法计算时采用的本构模型主要为线弹性模型, 对于采用非线性模型和弹塑性模型

分析极少^[17-19], 作者在文中提出了数值流形方法进行非线性分析的算法, 利用中点增量法以改变 $E-\mu$ 或 $K-G$ 模型中弹性常数的方式来反映非线性, 并给出算例验证在三维数值流形方法中进行非线性分析的可行性。

2 六面体覆盖的三维数值流形方法

2.1 三维数值流形方法的覆盖位移函数和权函数

流形单元是物理覆盖的交集, 对三维数值流形方法而言, 若采用六面体有限元网格作为数学覆盖, 则一个线性流形单元由 8 个物理覆盖的相互交叠覆盖组成, 2 次流形单元由 20 个物理覆盖的相互交叠覆盖组成。如图 1 所示, 其中六面体 $abcdefgh$ 为 2 次流形单元中覆盖点 13 的物理覆盖区域。

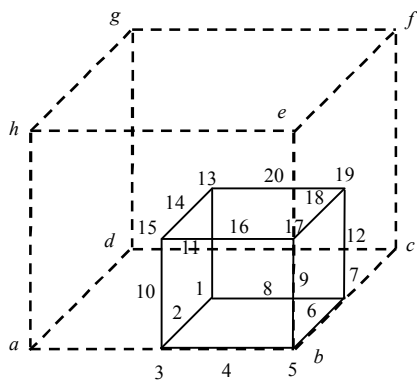


图 1 流形单元的覆盖系统
Fig.1 Cover system of manifold element

在数值流形方法中, 物理覆盖上的覆盖位移函数的构造是灵活的。针对三维问题, 目前通常取其为坐标 (x, y, z) 的级数形式, 则可定义物理覆盖 U_i 上的覆盖位移函数为

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{cases} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} S_{ij}(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & S_{ij}(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & S_{ij}(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,3j-2} \\ d_{i,3j-1} \\ d_{i,3j} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m [S_{ij}] \{D_{ij}\} \quad (1)$$

式中: u_i 、 v_i 、 w_i 为三维位移函数; $S_{ij}(x, y, z)$ 为完全多项式的基本级数, 表达式为 $\{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz, \dots\}$ 。流形单元的覆盖位移函数可取 0 阶到高阶的完全多项式; 对应 0、1、2 阶情况; m 分别为 1、4、10; $d_{i,3j-2}$ 、 $d_{i,3j-1}$ 及 $d_{i,3j}$

为物理覆盖的广义自由度。

各物理覆盖的位移函数在它们的交集即流形单元上通过权函数 N_i 对其进行加权平均而构成流形单元的覆盖位移函数, 表示为

$$\begin{cases} u_e(x, y, z) \\ v_e(x, y, z) \\ w_e(x, y, z) \end{cases} = \sum_{i=1}^n [N_i] \begin{cases} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{cases} = \sum_{i=1}^n [T_{ij}] \{D_{ij}\} = [T_e] [D_e] \quad (2)$$

式中: n 为流形单元的物理覆盖数; $[D_e]$ 为总自由度矩阵; $[T_e]$ 为形函数与基本级数元素之积的矩阵, 其中:

$$[T_{ij}] = [N_i] [S_{ij}] \quad (3)$$

对于数值流形方法里的权函数定义为

$$\begin{cases} N_i(x) \geq 0 & x \in U_i \\ N_i(x) = 0 & x \notin U_i \end{cases} \quad (4)$$

在多个覆盖重叠的区域

$$\sum_{x \in U_j} N_j(x) = 1 \quad (5)$$

理论上, 权函数只要满足式 (4)、(5) 条件即可, 但为了便于应用和程序设计, 在多数情况下可采用与有限元法里等参单元的插值形函数来表示。

线性六面体流形单元的权函数为

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (6)$$

式中: $\xi_0 = \xi \xi_i$, $\eta_0 = \eta \eta_i$, $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$ 。 ξ_i 、 η_i 、 ζ_i 是节点 i 在 $\xi \eta \zeta$ 坐标系中的局部坐标值。

2 次六面体流形单元的权函数表达式为

$$\begin{aligned} N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \cdot \\ \xi_i^2 \eta_i^2 \zeta_i^2 + \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) (1 - \xi_i^2) \eta_i^2 \zeta_i^2 + \\ \frac{1}{4} (1 - \eta^2)(1 + \zeta_0)(1 + \xi_0) (1 - \eta_i^2) \xi_i^2 \zeta_i^2 + \\ \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) (1 - \zeta_i^2) \eta_i^2 \xi_i^2 \end{aligned} \quad (7)$$

文献[15-16]均对三维六面体流形单元进行了研究, 本文中的公式表达则更为一般化, 线性及 2 次六面体流形单元亦可适用。

2.2 三维数值流形方法的平衡方程

设在分析对象中共有 n 个物理覆盖, 对于三维流形单元来说, 每个物理覆盖 i 有 3 m 个覆盖自由度。在考虑参与体系平衡的各种平衡力项的情况下,

其总势能可以表达为

$$\Pi = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_1^T \quad \mathbf{D}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{D}_n^T) \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} + (\mathbf{D}_1^T \quad \mathbf{D}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{D}_n^T) \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} + C \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{D}_i = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{i3m} \end{Bmatrix} \quad i=1,2,3,\dots,n$$

对覆盖自由度 $\{D\}$ 变分, 得到平衡方程为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式中: K_{ij} 为 $3m \times 3m$ 阶矩阵; D_i 及 F_i 为 $3m \times 1$ 阶矩阵。

2.3 三维流形单元的应变矩阵和刚度矩阵

设在流形单元 e 上有 n 个物理覆盖, 每个覆盖点有 $3m$ 个覆盖自由度。可得材料位移与应变之间的关系可表达如下:

$$\{\varepsilon_e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ex} \\ \varepsilon_{ey} \\ \varepsilon_{ez} \\ \gamma_{exy} \\ \gamma_{eyz} \\ \gamma_{ezx} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{3m} \begin{Bmatrix} \frac{\partial t_{1,j}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{2,j}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{3,j}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{1,j}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,j}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{2,j}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,j}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{1,j}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,j}}{\partial x} \end{Bmatrix} \{d_{i,j}\} = [B_e] \{D_e\} \quad (10)$$

其中 $[B_e]$ 为三维流形单元的应变矩阵, 表示为

$$[B_e] = [B_{e1} \quad B_{e1} \quad \cdots \quad B_{en}] \quad (11)$$

$[B_{er}] =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_{1,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{1,2}}{\partial y} & \frac{\partial t_{1,3}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial t_{1,3m}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{2,1}}{\partial y} & \frac{\partial t_{2,2}}{\partial y} & \frac{\partial t_{2,3}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial t_{2,3m}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{3,1}}{\partial z} & \frac{\partial t_{3,2,j}}{\partial z} & \frac{\partial t_{3,3}}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial t_{3,3m}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{1,1}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,2}}{\partial x} & \frac{\partial t_{1,3}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,3}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial t_{1,3m}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,3m}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{2,1}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,1}}{\partial y} & \frac{\partial t_{2,2}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,2}}{\partial y} & \frac{\partial t_{2,3}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,3}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial t_{2,3m}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,3m}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{1,1}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{1,2}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,2}}{\partial x} & \frac{\partial t_{1,3}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,3}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial t_{1,3m}}{\partial z} + \frac{\partial t_{3,3m}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

三维流形单元 e 的应变势能 Π_e 为

$$\begin{aligned} \Pi_e = & \iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon_{ex} \sigma_{ex} + \varepsilon_{ey} \sigma_{ey} + \varepsilon_{ez} \sigma_{ez} + \gamma_{exy} \tau_{exy} + \\ & \gamma_{eyz} \tau_{eyz} + \gamma_{ezx} \tau_{ezx}) dx dy dz = \\ & \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon_e\} \{\sigma_e\} dx dy dz = \\ & \frac{1}{2} \iiint_V \{D_e\}^T [B_e]^T [E] [B_e] \{D_e\} dx dy dz = \\ & \frac{1}{2} \{D_e\}^T [\iiint_V [B_e]^T [E] [B_e] dx dy dz] \{D_e\} \end{aligned} \quad (13)$$

式中: V 为流形单元的积分区域; $[E]$ 为弹性矩阵, 可用弹性常数 E 、 μ 或 K 、 G 来表示。

由最小势能原理可知, 三维流形单元的刚度矩阵为

$$\begin{aligned} [K_e] = & \iiint_V [B_e]^T [E] [B_e] dx dy dz = \iiint_V \begin{Bmatrix} [B_{e1}]^T \\ [B_{e2}]^T \\ \vdots \\ [B_{en}]^T \end{Bmatrix} \\ & [E] ([B_{e1} \quad B_{e2} \quad \cdots \quad B_{en}]) dx dy dz = \\ & \begin{bmatrix} K_{e11} & K_{e12} & \cdots & K_{e1n} \\ K_{e21} & K_{e22} & \cdots & K_{e2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{en1} & K_{en2} & \cdots & K_{enn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

$[K_e]$ 由 $q \times q$ 子矩阵组成, 每个子矩阵可由下式计算:

$$[K_{ers}] = \iiint_V [B_{er}]^T [E] [B_{es}] dx dy dz \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

式(15)包含了覆盖函数阶数从0阶到高阶的情况。在目前数值流形方法中,覆盖函数的阶次最高一般取到2次。取0阶到2阶的覆盖函数时,式(15)得到的线性六面体流形单元刚度矩阵分别为 3×3 、 12×12 、 30×30 阶矩阵,也就是说,对就于0、1、2阶的覆盖函数,必须推导9、144、900个单元刚度子矩阵的被积函数解析表达式。

3 本构模型的应用

在岩土工程中,岩土体的应力-应变关系是很复杂的。对岩土本构关系的研究虽然是十分复杂的,但却又是极其重要的。近几十年来人们经过大量的工程实践和理论分析,相继提出多种岩土体本构模型,大体上可概括分为以下3类:线性弹性模型;非线性弹性模型;弹塑性模型。

3.1 线弹性模型

线弹性模型因其简单明了,计算简便为目前数值流形方法中大多选用的本构模型,如文献[1-16]。

3.2 非线性模型

非线性是岩土体的一个重要力学特性,其数学模型也是岩土工程数值方法分析中常用的本构模型。非线性计算模型有 $E-\mu$ 计算模型和 $K-G$ 计算模型。而对于 $E-\mu$ 计算模型,在文献[19]中作者对Duncan-Chang模型已经做了研究。因此本文中选用成都科技大学 $K-G$ 模型作为非线性模型进行研究说明。这里简要介绍 $K-G$ 模型的弹性模量。

体积变形模量 K_i 的表达式为

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{K_i + \alpha_k p^{\gamma_k}} + [\beta_k (\eta + 1) \zeta_k p^{-1} + \theta_k p^{-1}] \eta \quad (16)$$

式中: K_i 为初始体积变形模量; α_k 、 γ_k 为等压固结试验参数; β_k 、 ζ_k 为不等压固结试验参数; θ_k 是 p 为常数的试验参数。

切线剪切模量 G_i 的表达式为

$$G_i = G_i + \alpha_G p + \beta_G q \quad (17)$$

式中: G_i 为初始切线剪切模量; α_G 、 β_G 为由破坏线方程所得的参数。

3.3 弹塑性模型

对于弹塑性模型在数值流形方法中的应用,王书法等[18]采用参变量变分原理建立了弹塑性分析的数值流形方法,该方法在弹塑性问题的分析中有很大的先进性。但该方法只能应用于0阶覆盖函数的情况,对于高阶的流形方法则不能应用。在文[19]中作者已进行了详细的分析,这里不再累述。

4 非线性分析算法

非线性问题的求解方法有迭代法和增量法两种。朱以文等基于总体拉格朗日列式,建立了大变形分析的增量流形方法,此方法实际上进行非线性求解的修正迭代法[17]。文中进行非线性分析时采用中点增量法对 $K-G$ 模型进行计算求解。

中点增量法是一种常用的修正增量法,该方法用某级荷载下的平均应力所对应的刚度矩阵进行计算。计算时,先用本级初始应力确定的刚度矩阵试算一次,得出的应力与该级初始应力平均,就得到该级荷载的平均应力(中点应力),再求刚度矩阵,重新计算。文中以它作为求解方法,并说明其求解步骤。作为数值流形方法的非线性分析算法,在第 i 级荷载增量 $\{\Delta R_i\}$ 情况下,其求解步骤:

(1) 施加荷载增量 $\{\Delta R_i\}/2$, 计算临时位移增

$$\text{量: } [K_{i-1}] \left\{ \Delta \delta_{i-1}^* \right\} = \{\Delta R_i\}/2;$$

(2) 得到相应的增量中点处临时位移总量为

$$\left\{ \delta_{i-1}^* \right\} = \left\{ \delta_{i-1} \right\} + \left\{ \Delta \delta_{i-1}^* \right\};$$

(3) 根据临时位移总量及应力-应变关系计算中点刚度矩阵 $\left[K_{i-1/2} \right];$

(4) 施加全荷载增量 $\{\Delta R_i\}$, 计算位移增量:

$$\left[K_{i-1/2} \right] \left\{ \Delta \delta_i \right\} = \{\Delta R_i\};$$

(5) 计算应力增量 $\{\Delta \sigma_i\}$ 和应变增量 $\{\Delta \epsilon_i\};$

(6) 计算相应的位移总量 $\{\delta_i\}$ 、应变总量 $\{\epsilon_i\}$ 和应力总量 $\{\sigma_i\};$

当非线性模型为 $E-\mu$ 模型或 $K-G$ 模型时,分别进行下面(7a)和(7b)步对刚度矩阵进行重新计算。

(7a) 根据应力总量 $\{\sigma_i\}$ 求出主应力;把得到的主应力 σ_1 、 σ_3 回代到Duncan-Chang模型的弹性模量表达式中,进而得出新的切线弹性模量 E_i 和切线泊松比 μ_i 。

(7b) 根据应力总量 $\{\sigma_i\}$ 求出平均应力 p 和广义应力 q ,回代到 $K-G$ 模型的弹性模量表达式(16)和(17)中,进而得出新的体积变形模量 G_i 和剪切弹性模量 G_i 。

对各级荷载重复上述步骤,即可得到最后解答。对于第一级荷载计算时,刚度矩阵用初始切线常数 E_i 、 μ_i (Duncan-Chang模型)或初始体积变形模量

K_i 和剪切弹性模量 G_i (K - G 模型) 建立。

在数值流形方法中, 求解的未知场函数为 $\{\Delta d_i\}$ (即上述 $\{\Delta \delta_i\}$) 并非实际覆盖位移 $\{\Delta u_i\}$, 但它们之间具有如下关系:

$$\{\Delta u_i\} = [s_{ij}] \begin{Bmatrix} \Delta d_{i1} \\ \vdots \\ \Delta d_{im} \end{Bmatrix} = [1, x, y, z, \dots, x^n, y^n, z^n] \begin{Bmatrix} \Delta d_{i1} \\ \vdots \\ \Delta d_{im} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

在进行程序计算时, 必需调用上述表达式的函数才能正确的进行求解。如在采用 1 阶三维流形单元覆盖位移函数时, 函数公式为

$$\Delta u_i = \Delta d_{i1} + x\Delta d_{i2} + y\Delta d_{i3} + z\Delta d_{i4} \quad (19)$$

采用全 2 阶三维流形单元覆盖位移函数时函数公式为

$$\Delta u_i = \Delta d_{i1} + x\Delta d_{i2} + y\Delta d_{i3} + z\Delta d_{i4} + x^2\Delta d_{i5} + y^2\Delta d_{i6} + z^2\Delta d_{i7} + xy\Delta d_{i8} + xz\Delta d_{i9} + zy\Delta d_{i10} \quad (20)$$

当数值流形方法进行非线性分析时, 利用中点增量法分步加载来改变弹性矩阵中的弹性模量, 从而反映非线性, 把非线性问题转化为组合线弹性问题, 以分段直线来逼近问题曲线, 其实质是把非线性问题近似为分段线弹性进行模拟, 以便较好地接近实际工程情况。由于在同一荷载步求解计算时, 弹性矩阵假定为常数矩阵, 因此可适用于任意阶数的数值流形方法求解。

5 算 例

基于文中建立的六面体有限覆盖的三维数值流形方法的计算模式和非线性分析研究, 采用编制的分析程序对算例进行分析。

算例如图 2 所示, 地基土为粉土, 弹性模量为 17.6 MPa, 泊松比 ν 为 0.4。作用在其上的浅基础为一方形钢筋混凝土平板。尺寸为 $l \times b \times h = 1.5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$ 。钢筋混凝土浅基础的泊松比 ν 为 0.2, 弹性模量为 $2.55 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。

在竖直荷载作用下计算它的沉降及承载力时, 因其结构与荷载均对称可取 1/2 加以研究, 本文沿 x 方向取 1/2 计算, 模型长为 10.8 m, 宽、高分别取 5.4 m。采用 2 次六面体流形单元对地基土进行网格划分如图 3 所示, 共生成 3 131 个物理覆盖和 596 个流形单元。地基土底边受 Z 向单向约束, 四周边受 x 、 y 双向约束, 共 1 107 个物理覆盖受约束。

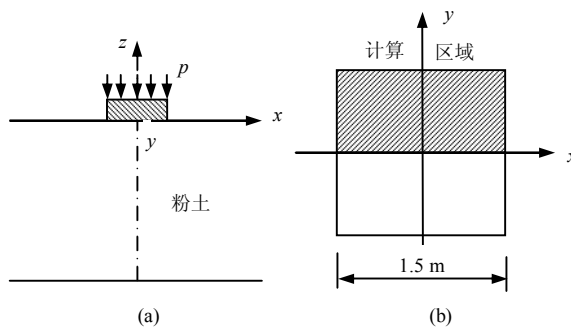


图 2 基础分析示意图

Fig.2 Sketch of foundation analysis

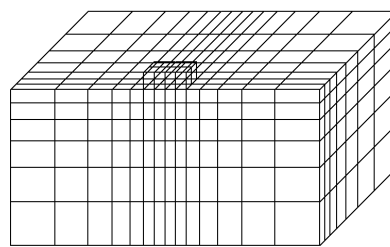


图 3 计算模型流形单元划分

Fig.3 Manifold elements mesh of computational model

在基础上部均布施加 p 为 100 kPa 的荷载, 流形单元采用 14 点高斯积分, 得到地基沉降的变形图如图 4 所示。

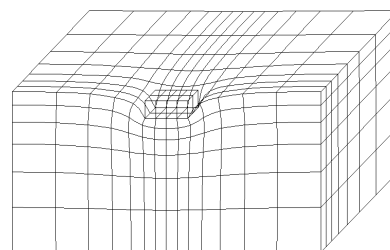


图 4 地基沉降变形图

Fig.4 Deformation of foundation

在模型计算分析中, 可以得出在基础板角点所在处为最大沉降, 沉降量为 10.28 mm。图 5、6 分别给出了沿 x 轴线上地表沉降的位移计算数值 (其中沉降变形与地面竖直 z 轴呈轴对称) 和基础中心点处沿 z 轴线的不同深度上的沉降值, 可以看出, 本文的三维数值流形方法的计算结果均略大于 ANSYS 的计算结果; 但整体上与之比较一致, 这反映了本文三维数值流形方法思想的正确性。另外, 从图 4 可以看出, 本文程序可以将计算数据结果进行一定程度上直观图形显示, 具有较好的前后处理的效果。

对浅基础材料不考虑其非线性, 按照弹性材料进行分析。若对土体采用非线性本构模型计算, 各

模型参数取自文献[20]。其中, Duncan-Chang 模型 ($E-\mu$ 模型) 参数为: $c = 8 \text{ kPa}$, $\varphi = 33.8^\circ$, $R_f = 0.91$, $K = 176.31 \text{ kPa}$, $n = 1.17$, $D = 1.42$, $G = 0.4$, $F = 0.16$ 。K-G 模型参数为: $K_i = 2\,664 \text{ kPa}$, $G_i = 3\,205 \text{ kPa}$, $a_k = 77.17$, $\alpha_G = 89$, $\beta_G = -85$ 。有限单元法采用 Druck-Prager 理想弹塑性模型 (D-P 模型) 计算时参数 c 、 φ 值同 Duncan-Chang 模型参数。

根据每一荷载步的计算结果绘出浅基础中心点的 $F-s$ 沉降曲线, 如图 7 所示。

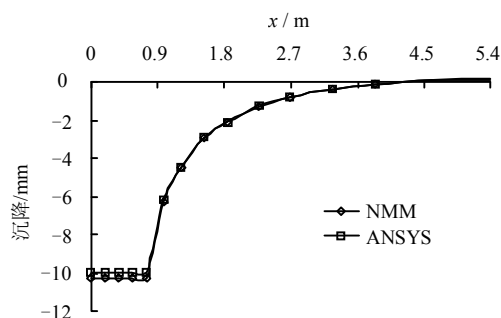


图 5 x 轴线 (地表面) 的沉降位移值
Fig.5 Displacements of x axis (surface)

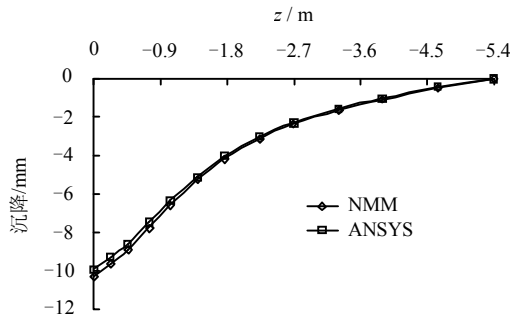


图 6 z 轴线 (基础中心) 的沉降位移值
Fig.6 Displacements of z axis
(foundation underside center)

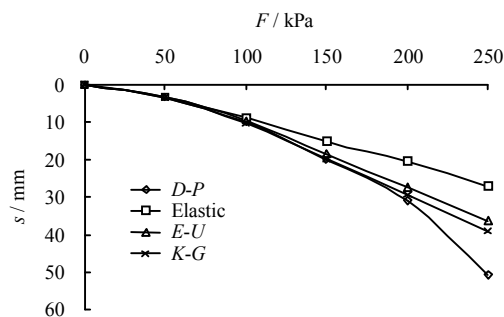


图 7 浅基础基底中心点 $F-s$ 曲线
Fig.7 $F-s$ curve of the center point at the bottom
of shallow foundation

由图可见:

(1) 在 $F = 0 \sim 100 \text{ kPa}$ 阶段, 地基沉降随载荷增加所呈现的非线性特征并不明显, 表明地基尚处于弹性工作状态。

(2) 在 $F = 100 \sim 200 \text{ kPa}$ 阶段, 地基沉降则随载荷增加呈现出非线性增加趋势。

(3) 在 $F = 200 \sim 250 \text{ kPa}$ 阶段, 对非线性 $E-\mu$ 和 $K-G$ 模型, 未出现明显转折点, 但对于 D-P 模型, $F-s$ 则出现比较明显的转折点, 表明地基进入塑性工作阶段。经计算再增加荷载时土体即破坏, 说明此时荷载已达到地基极限承载力。

6 结 论

(1) 文中构造了六面体有限覆盖的三维流形单元。引入了有限单元法等单元的插值形函数作为数值流形方法的权函数, 推导了三维六面体流形单元的计算格式。

(2) 根据弹性非线性的特点, 提出了采用中点增量法对 $E-\mu$ 模型和 $K-G$ 模型进行数值流形方法分析, 通过算例分析表明, 三维数值流形方法进行非线性模拟是可行的。

(3) 对于数值流形方法的三维问题和非线性分析的研究, 目前的工作仍是初步的。可以以本文的思想为基础, 进一步发展和完善相应的理论体系, 去尝试对较为复杂的实际工程 (如三维边坡、三维洞室开挖等) 问题进行非线性分析。

参 考 文 献

- [1] SHI G. H. Manifold method of material analysis[C]// Transactions of the Ninth Army Conference on Applied Mathematics and Computing. Minnesota: [s. n.], 1991, 51-76.
- [2] LIN S J, LEE D H. Manifold method using polynomial basis function of any order[C]//Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis and Simulations of Discontinuous Media. California: Berkeley, 1996: 365-372.
- [3] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法中的几点改进[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(6): 33-36.
WANG Zhi-yin, LI Yun-peng. Some improvements in the numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(6): 33-36.
- [4] 王水林, 冯夏庭, 葛修润. 高阶流形方法模拟裂纹扩展研究[J]. 岩土力学, 2003, 24(4): 622-625.
WANG Shui-lin, FENG Xia-ting, GE Xiu-run. Study on crack propagation modeling by high order manifold method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(4): 622-625.
- [5] 张大林, 栾茂田, 杨庆, 等. 数值流形方法的网格自动

- 剖分技术及其数值方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1836—1840.
- ZHANG Da-lin, LUAN Mao-tian, YANG qing, et al. Automatic mesh generation and numerical algorithm of numerical manifold method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(11): 1836—1840.
- [6] 彭自强, 葛修润. 数值流形方法在八节点有限元网格上的实现[J]. 武汉大学学报(工学版), 2004, 37(1): 72—76.
- PENG Zi-qiang, GE Xiu-run. Numerical manifold method on eight-node isoparametric element meshes[J]. **Engineering Journal of Wuhan university**, 2004, 37(1): 72—76.
- [7] 周小义, 邓安福. 基于广义变分原理的梁板单元分析的数值流形方法[J]. 固体力学学报, 2008, 29(3): 313—318.
- ZHOU Xiao-yi, DENG An-fu. Numerical manifold method of analysis for beam and plate based on generalized variational principle[J]. **Chinese Journal of Solid Mechanics**, 2008, 29(3): 313—318.
- [8] 王书法, 朱维申, 李术才, 等. 加锚岩体变形分析的数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(8): 1120—1123.
- WANG Shu-fa, ZHU Wei-shen, LI Shu-cai et al. Numerical manifold method of deformation analysis for bolt-supported rockmass[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(8): 1120—1123.
- [9] 唐树名, 吕常新, 邓安福. 预应力锚索加固路堑边坡的数值流形分析[J]. 公路交通科技, 2002, 19(6): 10—12.
- TANG Shu-ming, LÜ Chang-xin, DENG An-fu. Analysis of NMM on cutting-slope reinforced by prestressed cable[J]. **Journal of Highway and Transportation Research and Development**, 2002, 19(6): 10—12.
- [10] 董志宏, 邬爱清, 丁秀丽. 基于数值流形方法的地下洞室稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(增 2): 4956—4959.
- DONG Zhi-hong, WU Ai-qing, DING Xiu-li. Stability study of underground cavern with numerical manifold method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(Supp. 2): 4956—4959.
- [11] 凌道盛, 叶茂. Biot 平面固结分析的流形单元法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(3): 274—280.
- LIN Dao-sheng, YE Mao. Manifold element method for Biot's plane consolidation analysis[J]. **Chinese Journal of Computation Mechanics**, 2005, 22(3): 274—280.
- [12] 朱爱军, 邓安福, 曾祥勇. 数值流形方法对岩土工程开挖卸荷问题的模拟[J]. 岩土力学, 2006, 27(2): 179—183.
- ZHU Ai-jun, DENG An-fu, ZENG Xiang-yong. Numerical manifold method for simulation of excavation unloading in geotechnical engineering[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(2): 179—183.
- [13] 周小义, 邓安福, 郑冰. 弹性地基上中厚板的数值流形方法[J]. 工业建筑, 2008, 38(1): 65—68.
- ZHOU Xiao-yi, DENG An-fu, ZHENG Bing. Numerical manifold method of moderately thick plate analysis of elastic foundation[J]. **Industrial Construction**, 2008, 38(1): 65—68.
- [14] 姜清辉, 邓书申, 周创兵. 三维高阶数值流形方法研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(9): 1471—1474.
- JIANG Qing-hui, DENG Shu-shen, ZHOU Chuang-bing. Study of three-dimensional high-order numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(9): 1471—1474.
- [15] 彭自强, 葛修润. 数值流形方法在有限元二十节点单元上的实现[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 21(15): 2622—2627.
- PENG Zi-qiang, GE Xiu-run. Implementation of numerical manifold method by using 3D twenty-node iso-parametric element meshes of FEM[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 21(15): 2622—2627.
- [16] 郑榕明, 张勇慧. 基于六面体覆盖的三维数值流形方法的理论探讨与应用. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(10): 1745—1754.
- ZHENG Rong-ming, ZHANG Yong-hui. Application and discussion of three dimensional numerical manifold method based on hexahedron element[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 23(10): 1745—1754.
- [17] 朱以文, 曾又林, 陈明祥. 岩石大变形分析的增量流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(1): 1—5.
- ZHU Yi-wen, ZENG You-lin, CHEN Ming-xiang. Incremental manifold method in analysis of large deformation for rock[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1999, 18(1): 1—5.
- [18] 王书法, 朱维申, 李术才, 等. 岩体弹塑性分析的数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 900—904.
- WANG Shu-fa, ZHU Wei-shen, LI Shu-cai, et al. Numerical manifold method of elastoplastic analysis for rockmass[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(6): 900—904.
- [19] 周小义, 邓安福. 岩土体非线性分析的数值流形方法[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(2): 298—302.
- ZHOU Xiao-yi, DENG An-fu. Numerical manifold method of nonlinear analysis for rock and soil mass[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(2): 298—302.
- [20] 张明义, 邓安福. 土本构模型参数的图像程序确定法[J]. 岩土工程学报, 1992, 14(9): 88—93.
- ZHANG Ming-yi, DENG An-fu. Picture-program method for determining parameters of soil constitutive models[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 14(9): 88—93.